6 Semaine 19

6.1 Question de Cours

1. Montrer que la réunion de deux sous-espaces vectoriels en est un si et seulement si l'un est inclus dans l'autre.
2. Rappeler ce que sont une famille libre et une famille liée.
3. Caractérisation : $F+G=\mathrm{Vect}(F\cup G)$.
4. Rappeler la liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts.

6.2 Exercices

Exercice 1 - Equivalents ou pas?

Quels sont les équivalents corrects parmi les propositions suivantes?

1. $n \sim_{+\infty} n+1$ **2.** $n^2 \sim_{+\infty} n^2+n$ **3.** $\ln(n) \sim_{+\infty} \ln(10^6 n)$
4. $\exp(n) \sim_{+\infty} \exp\left(n+10^{-6}\right)$ **5.** $\exp(n) \sim_{+\infty} \exp(2n)$ **6.** $\ln(n) \sim_{+\infty} \ln(n+1)$.

Exercice 2 - Équivalents simples de suites

Trouver un équivalent le plus simple possible aux suites suivantes :

1. $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$ **2.** $v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
3. $w_n = \frac{n^3-\sqrt{1+n^2}}{\ln n - 2n^2}$ **4.** $z_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$.

Exercice 3 - Équivalent simple

Déterminer un équivalent le plus simple possible des fonctions suivantes :

1. $x+1+\ln x$ en 0 et en $+\infty$ **2.** $\cos(\sin x)$ en 0
3. $\cosh(\sqrt{x})$ en $+\infty$ **4.** $\dfrac{\sin x \ln(1+x^2)}{x \tan x}$ en 0
5. $\ln(\sin x)$ en 0 **6.** $\ln(\cos x)$ en 0

Exercice 4 - Équivalent d'un polynôme

Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ un polynôme à coefficients réels, avec $a_n \neq 0$. On note p le plus petit indice tel que $a_p \neq 0$. Déterminer un équivalent simple de P en $+\infty$. Déterminer un équivalent simple de P en 0.

EXERCICE 5 -

Soient f, g deux fonctions définies au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$ et strictement positives. On suppose en outre que $f \sim_a g$ et que g admet une limite $l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Montrer que si $l \neq 1$, alors $\ln f \sim_a \ln g$. Que se passe-t-il si $l = 1$?

EXERCICE 6 - Exponentielle et équivalent

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage d'un réel a ou de $a = \pm\infty$. Montrer que $e^f \sim_a e^g \iff \lim_a(f - g) = 0$. A-t-on $f \sim_a g \implies e^f \sim_a e^g$?

EXERCICE 7 - Exponentielle et négligeabilité

Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que $f \xrightarrow{+\infty} +\infty$.

1. On suppose que $g =_{+\infty} o(f)$. Montrer que $\exp(g) =_{+\infty} o(\exp(f))$.
2. Montrer que la réciproque est fausse.
3. Application : comparer $f(x) = (\ln(\ln x))^{x^{\ln x}}$ et $g(x) = (\ln x)^{x^{\ln(\ln x)}}$ au voisinage de $+\infty$.

EXERCICE 8 - Comparaison de fonctions

Comparer les fonctions suivantes :

1. $x \ln x$ et $\ln(1 + 2x)$ au voisinage de 0;
2. $x \ln x$ et $\sqrt{x^2 + 3x}\ln(x^2)\sin x$ au voisinage de $+\infty$;

EXERCICE 9 - Application des équivalents pour déterminer des limites

En utilisant (éventuellement) des équivalents, déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+2x)}{x^2-x^4}$

2. $\lim_{x\to 0} x(3+x)\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x}\sin(\sqrt{x})}$

3. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\tan(6x)}$

4. $\lim_{x\to \pi/2} \frac{\ln(\sin^2 x)}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$

5. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{1-\cos 2x}$

6. $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{4x+1}\ln\left(1-\frac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right)$

7. $\lim_{x\to +\infty} \exp\left(\frac{1}{x^2}\right)-\exp\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)$

8. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$

9. $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\arctan x}{x\tan x}$

Exercice 10 - Limite un peu théorique

Soit f définie sur un intervalle ouvert contenant x et de classe C^2 sur cet intervalle. Calculer

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x-h)-2f(x)+f(x+h)}{h^2}.$$

Exercice 11 - Un calcul de limite

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe C^2. Déterminer

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)-\frac{f(x)-f(0)}{x}}{x}.$$

Exercice 12 - Dérivée d'une racine carrée

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ une fonction de classe C^2.

1. Soit $x_0\in\mathbb{R}$ tel que $f(x_0)=0$. Que dire de $f'(x_0)$? de $f''(x_0)$?
2. Démontrer que $\sqrt{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout $x_0\in\mathbb{R}$ tel que $f(x_0)=0$, alors $f''(x_0)=0$.

Exercice 13 - Somme et produit de DLs

Calculer les développements limités suivants :

1. $\frac{1}{1-x}-e^x$ à l'ordre 3 en 0

2. $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}$ à l'ordre 4 en 0

3. $\sin x\cos(2x)$ à l'ordre 6 en 0

4. $\cos(x)\ln(1+x)$ à l'ordre 4 en 0

5. $(x^3+1)\sqrt{1-x}$ à l'ordre 3 en 0

6. $\big(\ln(1+x)\big)^2$ à l'ordre 4 en 0

Exercice 14 - Quotient de DLs

Déterminer les développements limités des fonctions suivantes :

1. $\dfrac{1}{1+x+x^2}$ à l'ordre 4 en 0 **2**. $\tan(x)$ à l'ordre 5 en 0

3. $\dfrac{\sin x - 1}{\cos x + 1}$ à l'ordre 2 en 0 **4**. $\dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$ à l'ordre 3 en 0.

Exercice 15 - Composition de DLs

Calculer les développements limités suivants :

1. $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4 en 0 **2**. $\exp(\sin x)$ à l'ordre 4 en 0

3. $(\cos x)^{\sin x}$ à l'ordre 5 en 0 **4**. $x\big(\cosh x\big)^{\frac{1}{x}}$ à l'ordre 4 en 0.

Exercice 16 - Intégration de DLs

Calculer les développements limités suivants :

1. $\arccos x$ à l'ordre 5 en 0 **2**. $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}dt$ à l'ordre 5 en 0.

Exercice 17 - Développement limité d'une fonction réciproque

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = x\exp(x^2)$.

1. Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f^{-1} admet un développement limité à l'ordre 4 en 0.
3. Donner ce développement limité.

Exercice 18 - Développement limité d'une fonction réciproque

Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = 2\tan x - x$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque de classe C^∞.
2. Justifier que f^{-1} est impaire.
3. Donner le développement limité de f^{-1} à l'ordre 6 en 0. On rappelle que $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$.

Exercice 19 - Limites de fonctions

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

1. $\dfrac{\sin x - x}{x^3}$ en 0;

2. $\dfrac{1+\ln(1+x)-e^x}{1-\cos x}$ en 0;

3. $\dfrac{\ln(1+x)-\sin(x)}{x^2}$ en 0;

4. $\dfrac{\exp(x^2)\cos(2x)-1}{\sin(x^2)-x^2}$ en 0;

5. $\dfrac{2x}{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$ en 0.

Exercice 20 - Étude locale d'une courbe

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$.

1. Donner un développement limité de f à l'ordre 3 en zéro.
2. En déduire que la courbe représentative de f admet une tangente au point d'abscisse 0, dont on précisera l'équation.
3. Prouver que la courbe traverse la tangente en 0. Un tel point est appelé point d'inflexion.

Exercice 21 - Position relative d'une courbe et de sa tangente

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln(x^2+2x+2)$. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 et étudier la position relative de la courbe et de la tangente au voisinage de ce point.